DST n$^{\text{o}}$5

Mathématiques - 22 Mars 2025 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 5 exercices tous indépendants.

Exercice 1

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \dfrac{1}{k} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$. Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la série de terme général u_k.

1. On pose pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) = x - \ln(1+x)$.

   (a) Montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$.

   (b) En déduire le signe de f sur $[0, +\infty[$.

2. On pose pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1+x)$.

   (a) Montrer que g est décroissante sur $[0; +\infty[$

   (b) En déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$

3. Montrer que pour tout entier naturel k non nul : $0 \leq u_k \leq \frac{1}{2k^2}$.

4. En déduire la nature de la série de terme général u_k. On ne demande pas de calculer sa somme.

Exercice 2

On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. À toute matrice X de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on associe la matrice Y définie par $Y = f(X) = AX + XA$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer le noyau de f, c'est à dire l'ensemble des matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $f(X)$ soit la matrice nulle. On précisera une base du noyau et sa dimension.

3. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

4. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c, d pour que M soit un élément de l'image de f, c'es à dire pour qu'il existe une matrice X vérifiant $f(X) = M$. On déterminera une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   (b) Déterminer les antécédents par f de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Une machine à sous est constituée de 4 roues mobiles. Chacune est partagée en p secteurs identiques dont un seul porte l'inscription "gagné". La rotation de chaque roue amène au hasard l'un quelconque de ses secteurs dans la "fenêtre" de la machine. Pour une mise de 1 euro on a le droit d'immobiliser les roues de son choix et de faire tourner les autres.

Pour gagner à ce jeu il faut amener tous les secteurs gagnants dans la fenêtre de la machine et au départ aucun secteur gagnant n'est visible.

1. Lors d'un premier essai, on fait donc tourner les quatre roues. Soit X_1 le nombre de secteurs gagnant obtenus.
   (a) Quelle est la loi de X_1 ?

   (b) Quelle est la probabilité de gagner le jeu dès le premier essai ?

2. On suppose que ce premier essai n'est pas concluant et on procède donc à un deuxième essai, en bloquant les roues ayant éventuellement amené le bon secteur.
   (a) Sachant que l'événement $[X_1 = k]$, avec $0 \leq k \leq 3$, est réalisé, quelle est la probabilité de gagner à ce deuxième essai ?

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales en déduire la probabilité de gagner en exactement deux essais.

3. On note Y le nombre aléatoire d'essais effectués pour gagner à ce jeu (dès qu'une roue quelconque amène le secteur "gagné" elle est évidemment bloquée pour les essais ultérieurs et au départ aucun secteur gagnant n'est visible.
   (a) Déterminer la probabilité pour qu'une roue donnée n'amène jamais le secteur gagnant au cours de k essais consécutifs. En déduire la probabilité pour qu'une roue donnée amène le secteur gagnant en au plus k essais.

   (b) En déduire que la probabilité de gagner en au maximum n essais est donnée par

   $$\mathbb{P}(Y \leq n) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)^4$$

   (c) En déduire la loi de Y.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. Une entreprise dispose d'un lot de n feuilles originales qu'elle a numérotées $1, 2, \dots, n$. Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. L'entreprise programme le photocopieur afin que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant, suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les originaux et les copies dans une boîte. Une personne est alors chargée du travail suivant : elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boîte. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boîte. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la boîte et elle recommence.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de pioches qui sont nécessaires pour vider la boîte lorsque celle-ci contient n originaux et n copies (soit $2n$ feuilles).

On considère l'événement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité, c'est-à-dire que $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_n.

2. **Étude de T_2.** On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boîte contient deux originaux et deux copies.
   (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$: $P(T_2 = k) = (1 - a_2)(a_2)^{k-2}$.

   (b) Justifier que la variable $S_2 = T_2 - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de T_2 en fonction de a_2.

3. **Étude de T_3.** On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boîte contient trois originaux et trois copies.
   (a) Calculer $P(T_3 = 2)$ puis $P(T_3 = 3)$ en fonction de a_2 et a_3.

   (b) À l'aide du système complet d'événements $(A_3, \bar{A}_3)$, démontrer pour tout $k \geq 2$ que :
   $$P(T_3 = k + 1) = (1 - a_3)P(T_2 = k) + a_3 P(T_3 = k).$$

   (c) Montrer que :
   $$\forall k \geq 2, \quad P(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2} \left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right].$$

   (d) Vérifier par un calcul que $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(T_3 = k) = 1$.

   (e) Prouver que la variable aléatoire $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer $E(T_3 - 1)$. Donner la valeur de $E(T_3)$ en fonction de a_2 et a_3.

   (f) Établir que la variable aléatoire $T_3(T_3 - 1)$ admet une espérance et donner sa valeur en fonction de a_2 et a_3. En déduire que T_3 admet une variance.

Exercice 5

1. Pour cette question, soient $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, -2, 1)$ et $v_3 = (2, 0, 3)$.
   (a) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, x = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ et tout $j \in \{1, 2, 3\}$, on définit le vecteur $u_{i,j} = v_i - v_j$. On note E_3 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $(u_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$.
   (a) Donner la liste des 9 vecteurs $u_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$.

   (b) Que vaut $\dim(E_3)$?

3. Dans toute la suite de l'exercice, $n \geq 1$ désigne un entier naturel quelconque et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

4. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $w_{i,j} = v_i - v_j$. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $(w_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.
   (a) Montrer que $w_{i,j}$ est le vecteur nul si et seulement si $i = j$.

   (b) Justifier que E est de dimension inférieure ou égale à n.

   (c) Montrer que la famille $(w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \ldots, w_{1,n})$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

   (d) Soient i et j deux entiers dans $\{1, \ldots, n\}$: exprimer le vecteur $w_{i,j}$ en fonction des vecteurs $w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \ldots, w_{1,n}$.

   (e) Quelle est la dimension de E ?

5. Soient a et b deux nombres réels. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $z_{i,j} = av_i + bv_j$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $(z_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.
   (a) Donner un exemple simple de nombres réels a et b pour lequel $F = \mathbb{R}^n$ et un exemple pour lequel $F \neq \mathbb{R}^n$.

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ soit inversible.

   (c) On suppose $a^2 \neq b^2$. Trouver deux nombres réels λ et μ tels que $\lambda z_{1,2} + \mu z_{2,1} = v_1$.

   (d) En déduire que, si $a^2 \neq b^2$, alors $F = \mathbb{R}^n$.

   (e) Que pensez-vous du cas $a^2 = b^2$?